201 – Espaces de fonctions. Exemples et applications.

Les fonctions sont des applications d'un ensemble E dans R ou C. Dans la suite on posera K=R ou C.

Une fonction est une application X ->K où K=R ou C. Soit F un ensemble de fonctions X->K. Si F a une structure d'espace vectoriel, on dit que F est un espace de fonctions.

Préliminaires : différents modes de convergence

I) <u>Les fonctions continues : C(X,K)</u>

Si X compact, espace complet.

L'ens des fcts nulle part dérivables est dense [Gou annexe A]

Ascoli. Appl : Cauchy Peano, opérateurs compacts.

Stone Weierstrass

Partie dense de C([0,1],R) [GT section 2.1]

Caractérisation de la DF [GT 2.4]

Fonctions continues et bornées ?

Fonctions lisses

Fonctions holderiennes [ZQ]

II) <u>Les espaces L^p : L^p(X,K)</u>

Les espaces L^p ne sont pas vraiment des espaces de fonctions mais des espaces de classes de fonctions.

Définition, cv dominée, L^p complet

Définition, espace normé, espace complet, dual, densité des fcts lisses à support compact. Appl : Riemann Lebesgue ?

Plancherel.

RFK

TCD, séparabilité

2) Espace L^2

Hilbert, séries de Fourier, transformée de Fourier, polynômes orthogonaux, base hilbertienne

III) <u>Les fonctions holomorphes : H(U,C)</u>

Espace de Bergman

<u>Développements :</u>
Espace de Bergman [Bayen & Margaria – Espaces de Hilbert et opérateurs] (***)
SW [Analyse L3 141] (**)
Th de Müntz [Gou Alg] + [Gou An] (**)
Sous espaces fermés de L^p [Rud Analyse fct 111] (**)

Rapport du jury : leçon de synthèse qui a permis à de très bons candidats de faire un exposé parfois brillant. Bien entendu, l'exhaustivité est à proscrire, le candidat doit choisir les thèmes et les espaces fonctionnels dont il souhaite présenter les propriétés. Voici quelques remarques ponctuelles. Le théorème d'Ascoli est souvent présenté pour l'espace C(X; Y) o`u X et Y sont des espaces métriques compacts et les candidats sont bien embarrassés lorsqu'on leur demande ce qu'il en est de l'espace C(X;R). Il est bon également de citer des applications de ce théorème fondamental, par exemple concernant les opérateurs intégraux à noyau continu, le théorème de Peano, etc. Pour la caractérisation du dual des espaces L^p, les candidats se contentent du cas 1 < p < 2, on ne peut ignorer le cas 2 < p < infini.
La leçon « Espaces de fonctions » est souvent pauvre, hors-sujet, et les espaces considérés ne sont pas des espaces de fonctions ! A propos des exemples d'espaces fonctionnels, qui apparaissent dans de nombreuses leçons, il est suggéré d'examiner l'espace des séries de Taylor absolument convergentes (copie de l^1) qui fournit un exemple simple d'algèbre de Banach de dimension infinie, pourvue de propriétés remarquables.

Le site de l'agrégatif : la 1ère difficulté de cette leçon tient à l'élaboration d'un plan qui tienne la route. Je n'y ai pas vraiment réfléchi, mais je pense qu'en première approche, on pourrait établir une sorte de zoologie des espaces fonctionnels.
-les meilleurs, en un sens qu'il faudrait préciser, sont ceux dont la structure est la plus riche et la mieux connue: je veux dire les espaces de Hilbert. Il y a l'espace de Sobolev W(2,2), et surtout L^2 sur lequel il faut insister à mon avis, en tenant compte de la remarque d'Angelo. - et puis, il y a ceux qui sont des espaces de Banach, normés complets donc, sur lesquels les calculs demeurent souples, entre autres parce que le critère de Cauchy est opérant: tous les espaces de fonctions différentiables définies sur de bons ensembles (compacts par exemple), sans oublier l'espace L(E,F) des alc entre evn. N'hésitez à donner d'autres exemples. -enfin, il y a ceux qui ne sont pas normés, parce que la nature mathématique est ainsi faite. Je crois qu'on peut trouver plein d'exemples dans le ZQ. Je pense à H(U), espace des fonctions holomorphes définies sur un domaine de C, qu'on munit de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Cet espace n'est pas normé mais défini par une famille de semi-normes. On y retrouve un très beau critère de compacité dû à Montel: les compacts de H(U) sont les fermés bornés! (la démo nécessite Ascoli.) Ecrivant cela, je me demande si un plan en 3 ou 4 parties, chacune étudiant à fond un exemple bien précis, ne serait pas valable. Ce qui pourrait donner:
1. L(E,F)
2. la classe Cn, n=0,1,..., infini
3. L^2 (et W^2)
4. la classe C omega, càd H(U)

Idée autre plan :

- I) Banach
- II) Hilbert
- III) evn